Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2022 - 2023

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης

8ο Γενικό επαναληπτικό διαγώνισμα

6-5-2023

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μια συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$ τότε η f θα έχει υποχρεωτικά ή ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

μονάδες 4

Α4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση μιας τυχαίας συνάρτησης που να ικανοποιεί την αντίστοιχη πρόταση.

α) Συνάρτησης με πεδίο ορισμού [α , β] που να είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ και να μην ισχύει το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.

β) Μιας συνάρτησης αντιστρέψιμης και της αντίστροφή της στο ίδιο σύστημα αναφοράς που έχουν και κοινά σημεία που δεν ανήκουν πάνω στην ευθεία $y=x$.

γ) Συνάρτησης που να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και όμως να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle στο [α,β].

δ) Μιας συνάρτησης , που να είναι $f(x)<0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Συναρτήσεων που να έχουν την ίδια παράγωγο ενώ οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1+e^x & , x<0\\ x^2+4x+\alpha & , x\geq 0\end{cases}$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 3

Αν α=2:

Β2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η f γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

Β4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται (Μονάδες 2) και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 8

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της γραφικής παράστασης της f^{-1} και των ευθειών x=2 και x= 3.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα [0,4] .

Επίσης f(0)=f(4)=0.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,4)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο ξ του προηγούμενου ερωτήματος .

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε ποιο είναι το μέγιστο της f και ποιες είναι οι θέσεις του.

Μονάδες 4

Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ=2 το f(2)=-2:

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες 4

Γ5.α) Αν Α(α,f(α)) , Β(β,f(β) δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f με 0<α < β< 4 , να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από το τμήμα ΑΒ στο διάστημα (α, β).

Μονάδες 3

β) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα των x , να δείξετε ότι Ε>4 .

Μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-1)f'(x)=xe^x-e^x-2x^2+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(0)=2.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-x^2-2x+1,\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ακρότατα .

Μονάδες 6

Δ3. α) Αν x_1, x_2 οι θέσεις των ακροτάτων με $x_1<x_2$, να δείξετε ότι $x_1<0$.

Μονάδες 2

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2 έχει ακριβώς 3 ρίζες .

Μονάδες 6

Δ4.α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=x\left(f(x)+x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$, των ευθείων x=1 , x=α με α >2 και του άξονα των x.

β) Αν ο ρυθμός μεταβολής της παραμέτρου α είναι α ΄(t)=2t , όπου t χρόνος σε sec και τη χρονική στιγμή t =0 είναι α=3cm, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(α), την χρονική στιγμή t=1 sec.

Μονάδες 4

Ευχόμαστε επιτυχία!